Développement : Le lemme de MORSE

ANALYSE & PROBABILITÉS
ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE

Référence : [ROU] ROUVIÈRE F., *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, quatrième édition revue et augmentée*, Cassini, 2003, p344.
Pour le lemme : p209 (mais c'est rappelé en p344, c'est l'exercice 66).
Pour les leçons :
- 148 : Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie. Rang. Exemples et applications. (Pas sûr)
- 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.
- 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
- 206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.
- 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.
- 215 : Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
- 218 : Formules de TAYLOR. Exemples et applications.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) est l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $E := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Lemme 1. ***Réduction des formes quadratiques.***

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Soit $\varphi : E \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(M) =^t MA_0M.$$

Alors, il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall A \in V \quad A =^t \psi(A)A_0\psi(A).$$

PREUVE : Pour $M \in E$, $\varphi(M)$ est polynomiale en les coefficients de M, donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E. Pour $H \in E$ au voisinage de I_n, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(I_n + H) &= {}^t(I_n + H)A_0(I_n + H)\\ &= A_0 + A_0H +^t HA_0 +^t HA_0H\\ &= \varphi(I_n) +^t (A_0H) + A_0H + \underset{H\to 0}{o}(\|H\|),\end{aligned}$$

puisque, si $\|\cdot\|$ est une norme sur E sous-multiplicative, $\|^t HA_0H\| \leqslant \|H\|^2\|A_0\|$.
Donc $\mathrm{d}\varphi(I_n) \cdot H =^t (A_0H) + A_0H$. En particulier, $\mathrm{d}\varphi(I_n) \cdot H$ est symétrique.
On a :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi(I_n)) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad | \quad A_0H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R}),$$

et donc, comme A_0 est inversible :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi(I_n))) = \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(\mathrm{d}\varphi(I_n)) = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$, avec $\mathrm{Im}(\mathrm{d}\varphi(I_n)) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{d}\varphi(I_n)) = S_n(\mathbb{R}),$$

et $\mathrm{d}\varphi(I_n) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Remarque 2.

Autre argument possible pour montrer que $\mathrm{d}\varphi(I_n) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est surjective : si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, en posant $H = \dfrac{1}{2}A_0^{-1}M$, on a $\mathrm{d}\varphi(I_n) \cdot H = M$.

Maintenant, soit $F := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad | \quad A_0M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Comme $A_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi(I_n)) \oplus F.$$

Donc F est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi(I_n))$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a de plus $I_n \in F$ et :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi_{|F}(I_n)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi(I_n)) \cap F = \{0\}.$$

Ainsi, $\mathrm{d}\varphi_{|F}$ est injective. Comme elle est surjective, $\mathrm{d}\varphi_{|F}$ est un isomorphisme.

Cela permet d'appliquer le théorème d'inversion locale : il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F (contenu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, quitte à le réduire) tel que $\varphi_{|F} : U \to V := \varphi_{|F}(U)$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
Or, V est un voisinage de $A_0 = \varphi_{|F}(I_n) = \varphi(I_n)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et :

$$\forall A \in V \quad \exists! M = \varphi_{|F}^{-1}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A = {}^t MA_0M.$$

On pose donc :

$$\psi = \varphi_{|F}^{-1},$$

et ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $U \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Cela achève la preuve. □

Théorème 3. ***Lemme de*** **MORSE.**

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $\mathrm{d}f(0) = 0$ et $\mathrm{d}^2 f(0)$ soit non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Alors, il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : W \to V$ entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et :

$$\forall x \in W \quad f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x)^2 - \sum_{k=p+1}^{n} \varphi_k(x)^2,$$

où les φ_k sont les fonctions coordonnées de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

<u>PREUVE :</u> Quitte à réduire U, on suppose que $U = \mathbb{D}(0, \varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$. En particulier, U est convexe.
On peut donc appliquer la formule de TAYLOR avec reste intégral à f à l'ordre deux :

$$\forall x \in U \quad f(x) = f(0) + \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}^2 f(tx)(x,x)\mathrm{d}t = {}^t xQ(x)x,$$

où $Q : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 (1-t)\mathrm{d}^2 f(tx)\mathrm{d}t$.
L'idée va être de transformer l'expression de Q (donc de f). Déjà, Q est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Remarque 4. ***Pourquoi Q est de classe $\mathcal{C}^1$?***

Justifions cela rigoureusement (à ne pas mettre pendant le développement, c'est juste si le jury demande à détailler). Vérifions donc les hypothèses du théorème :
$\longrightarrow$ Pour $t \in [0,1]$, $x \longmapsto (1-t)\mathrm{d}^2 f(tx)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U par produit et composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, puisque f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur U.
$\longrightarrow$ Pour $x \in U$, $t \longmapsto (1-t)\mathrm{d}^2 f(tx)$ est intégrable sur $[0,1]$, car continue sur le segment $[0,1]$.
$\longrightarrow$ <u>Domination :</u> On va le faire sur tout compact $K \subset U$. Soit donc $(t,x) \in [0,1] \times K$, qui est un compact.
La foncton $g : (t,x) \longmapsto (1-t)\mathrm{d}^2 f(tx)(x,x)$ est continue sur le compact $[0,1] \times K$ par produit et composition de fonctions continues. Elle a donc un maximum sur $[0,1] \times K$, qu'on peut noter κ, et :

$$\forall (t,x) \in [0,1] \times K \quad |g(x,t)| \leqslant \kappa,$$

avec $t \longmapsto \kappa$ qui est intégrable sur le segment $[0,1]$.
Il reste à dominer $\mathrm{d}_x g(t,\cdot)$, la différentielle de $g(t,\cdot)$ à $t \in [0,1]$ fixé. Pour $(t,x) \in [0,1] \times K$, on a :

$$g(t,x) = \mathrm{d}^2 f(tx)(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) t^2 x_i x_j,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_x g(t,x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}(t,x)\mathrm{d}x_k \\ &= t^2(1-t)\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left(t\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(tx)x_i x_j + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx)\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i x_j)\right)\right)\mathrm{d}x_k, \end{aligned}$$

avec, pour $i,j,k \in [\![1;n]\!]$, $\dfrac{\partial}{\partial x_k}(x_i x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \{i,j\} \\ 2x_k & \text{si } k = i = j \\ x_i & \text{si } k = i \neq j \\ x_j & \text{si } k = j \neq i \end{cases}$.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^3$, l'expression de $\mathrm{d}_x g(t,x)$, qui définit une fonction continue en (t,x), peut être majorée uniformément en $(t,x) \in [0,1] \times K$ par une constante κ', avec $t \longmapsto \kappa'$ qui est intégrable sur le segment $[0,1]$.
Ceci permet d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Par hypothèse, $Q(0) = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(0)$ est inversible, et elle est de plus symétrique (matrice hessienne symétrique, d'après le théorème de SCHWARZ).
D'après le lemme, il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et une application $M : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall x \in V \quad Q(x) =^t M(x)Q(0)M(x).$$

Remarque 5.

Si on veut rigoureusement appliquer le lemme, il nous donne en fait l'existence d'un voisinage V_0 de $Q(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi_0 : V_0 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall A \in V_0 \quad A =^t \psi_0(A)Q(0)\psi_0(A_0).$$

Comme Q est continue en 0, il se trouve que $V := Q^{-1}(V_0)$ est un voisinage de 0. Cela permet d'écrire :

$$\forall x \in V \quad Q(x) =^t M(x)Q(0)M(x),$$

où $Q(x) = A$, et donc $M(x) := \psi_0(Q(x))$.

Soit $x \in V$. Il vient :

$$f(x) - f(0) =^t (\psi(x)x)Q(0)\psi(x)x.$$

Or, par hypothèse, $Q(0)$ est de signature $(p, n-p)$.
D'après le théorème d'inertie de SYLVESTER, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$Q(0) =^t PDP,$$

où $D = \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & I_{n-p} \end{pmatrix}$ (matrice par blocs). D'où :

$$f(x) - f(0) =^t (P\psi(x)x)DP\psi(x)x.$$

En notant $\varphi : x \longmapsto P\psi(x)x$ (définie sur V), on a que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et $\mathrm{d}\varphi(0) : h \longmapsto PM(0)h$ est inversible d'inverse $h \longmapsto M(0)^{-1}P^{-1}$ (on rappelle que $M(0)$ et P sont inversibles).
D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage W contenant 0 tel que φ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de W sur $\varphi(W)$, qu'on considère comme contenu dans V (quitte à le réduire).
Par conséquent, pour tout $x \in W$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= {}^t\varphi(x)D\varphi(x) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x)^2 - \sum_{k=p+1}^{n} \varphi_k(x)^2 \end{aligned}$$

après calcul matriciel, ce qui achève la preuve. □